

O B E R S E M I N A R A R B E I T

zum Thema

*„Nichtlineare Zeitreihenanalyse – Determinismus, Prädiktion und
Rauschreduzierung: eine Fallstudie“*

von

Michael Schindler

geboren am 3. April 1994 in Rastatt

Version: 10. Februar 2020

Tag der Einreichung: 06.03.2020

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen	5
Mathematische Symbole	6
Einführung	7
0.1 Determiniert chaotische Bahnkurven	7
0.2 Chuas Schaltkreis	8
0.3 Einbettung in den Zustandsraum	8
Kapitel 1 Prädiktion	11
1.1 Einfluss der Abtastfrequenz	13
1.2 Verbesserung bei hoher Abtastfrequenz	14
Kapitel 2 Rauschreduktion	16
2.1 Abstandsberechnung	17
2.2 Ergebnis und Interpretation	19
2.3 Metrik für die Rauschreduktion	21
Literatur	23

Abbildungsverzeichnis

0.1	Chuas Schaltkreis, [Chu07]	8
0.2	Zeitbereich (Matlab)	9
0.3	Zustandsraum (Matlab)	9
0.4	Einbettung [KS03], S. 147	10
1.1	Abstand im Prädiktionshorizont l (Tikz)	11
1.2	Prädiktion im Zustandsraum (Matlab)	13
1.3	Zeitlich korrelierte Nachbarn (Tikz)	14
1.4	Prädiktion Zeitbereich (Matlab)	15
2.1	Abstandsmatrix (Matlab)	18
2.2	Rauschreduktion im Zeitbereich (Matlab)	19
2.3	Rauschreduktion im Zeitbereich (Matlab)	20
2.4	Rauschreduktion im Zustandsraum (Matlab)	21
2.5	Rauschreduktion mit Sinus (Matlab)	22
2.6	NMR Laser, [KS03], S.62	22

Abkürzungen

Abkürzung	Bezeichnung
NLTSA	engl. <i>Nonlinear Time Series Analysis</i>
acf	engl. <i>Auto-correlation function</i>
DGL	Differentialgleichung

Mathematische Symbole

Symbol	Bezeichnung
t_{lag}	Verzögerungszeit
m	Einbettungsdimension
$\mathbf{x}$	Vektor im Zustandsraum des betrachteten Systems
$\mathbf{s}$	Vektor im rekonstruierten Zustandsraum
$\mathcal{A}$	Attraktor des betrachteten Systems
$\tilde{\mathcal{A}}$	rekonstruierter Attraktor
Γ	Zustandsraum des betrachteten Systems
$\mathbb{R}^m$	rekonstruierter Zustandsraum
$\mathbf{G}$	Abbildung im Zustandsraum
$\mathbf{F}$	Abbildung im rekonstruierten Zustandsraum
$d_{j,k}$	Abstand zwischen $\mathbf{s}_j$ und $\mathbf{s}_k$
$\hat{\mathbf{s}}$	Schätzung von $\mathbf{s}$
$\bar{\mathbf{s}}$	Gemittelter Zustandsvektor
f_a	Abtastfrequenz der diskretisierten Trajektorie

Einführung

Die nichtlineare Zeitreihenanalyse bietet eine Alternative zu herkömmlichen linearen Verfahren und Methoden. Dabei werden Zeitreihen von Systemen $\mathbf{x}$ durch eine Messfunktion h abgebildet und betrachtet. Die Zeitreihen x werden so bearbeitet, dass ein Zustandsraum konstruiert werden kann, der dem ursprünglichen System äquivalent ist.

Die Transformation in einen äquivalenten Zustandsraum $\tilde{\mathcal{A}}$ wird durch das Bilden von Zustandsraumvektoren $\mathbf{s}$ erreicht. Dieser Vorgang wird ‘Einbettung’¹ genannt. Die Einbettung im Zustandsraum, die Wahl der Verzögerungszeit t_{lag} und der Einbettungsdimension m können der Literatur entnommen werden.²

In diesem äquivalenten Zustandsraum ist es möglich nichtlineare Methoden anzuwenden, die beispielsweise eine Prädiktion oder eine Rauschreduktion bewirken.

0.1 Determiniert chaotische Bahnkurven

Eine Bahnkurve ist die Lösung einer Differentialgleichung. Sie kann unter bestimmten Voraussetzungen determiniert chaotisch sein. Eine determiniert chaotische Bahnkurve ist auch aperiodisch und beschränkt.

Determiniert heißt, dass von einem Zustand auf den nächsten und auf alle weiteren in der Zukunft liegende geschlossen werden kann. Die Bahnkurve kann auch, wie z. B. die Trajektorie des Chua-Schaltkreises, oszillierende (schwingende) Anteile haben, ist aber aperiodisch, d. h. es ist keine Periodizität vorhanden und sie erreicht einen vorher erreichten Zustand kein zweites mal. Das bedeutet auch, dass diese Bahnkurven kreuzungsfrei sind.

Außerdem sind chaotische Bahnkurven beschränkt. Das heißt, dass sie nach dem Einschwingen einen bestimmten Wertebereich nicht mehr verlässt. Diesen Wertebereich nennt man Attraktor $\mathcal{A}$.

¹Einbettung: engl. *Embedding*

²z. B.: Kapitel 9, [KS03]

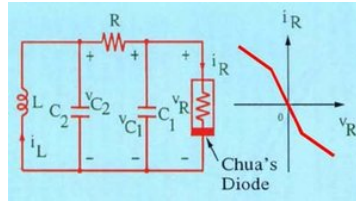


Abbildung 0.1: Chuas Schaltkreis

0.2 Chuas Schaltkreis

Der Chua Schaltkreis (Abbildung 0.1, [Chu07]) bildet mit der Wahl einiger Parameter ein deterministisch chaotisches System. Das heißt, dass die Lösung der Differentialgleichung eine endlose nichtperiodische Bahnkurve beschreibt.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha [y - x - f(x)] \\ RC_2 \frac{dy}{dt} &= x - y - Rz \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y\end{aligned}$$

Betrachtet man eine Dimension dieser Bahnkurve, z. B. den Spulenstrom i_L im Zeitbereich (Abbildung 0.2), sind aufklingende Schwingungen erkennbar. Es können zwei Schwingungsebenen ausgemacht werden, die sich in ihrem Mittelwert unterscheiden. In beiden Schwingungsebenen schwingt der Schaltkreis mit einer Grundfrequenz auf bis er entweder die Schwingungsebene wechselt oder auf derselben verharrt und erneut aufschwingt.

Betrachtet man die Bahnkurve im Zustandsraum (Abbildung 0.3) mit den Achsen u_{C1} , u_{C2} und i_L , erkennt man die Schwingungsebenen im Raum. Wenn die Schwingungsebene wechselt, sind diese Ebenen durch Bahnkurvenabschnitte miteinander verbunden.

0.3 Einbettung in den Zustandsraum

Mit der Einbettung in einen rekonstruierten Zustandsraum wird versucht, mithilfe einer Skalaren Messfunktion h den Attraktor des ursprünglichen Systems zu rekonstruieren.

Der Chua-Schaltkreis hat drei Energiespeicher. Durch sie hat die Differentialgleichung drei Dimensionen, die Kondensatorspannungen u_{C1} , u_{C2} und den Spulenstrom i_L . Die Lösung der DGL ist also auch dreidimensional und daraus folgt, dass der rekonstruierte

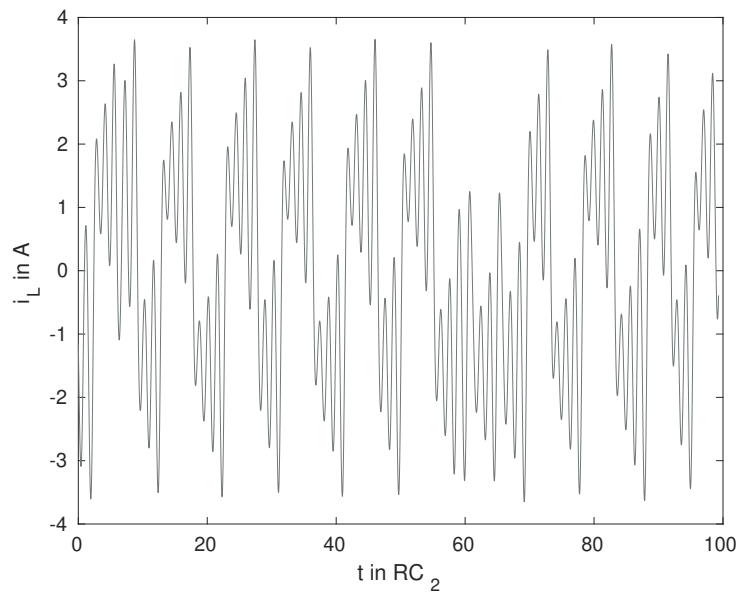


Abbildung 0.2: Spulenstrom im Zeitbereich

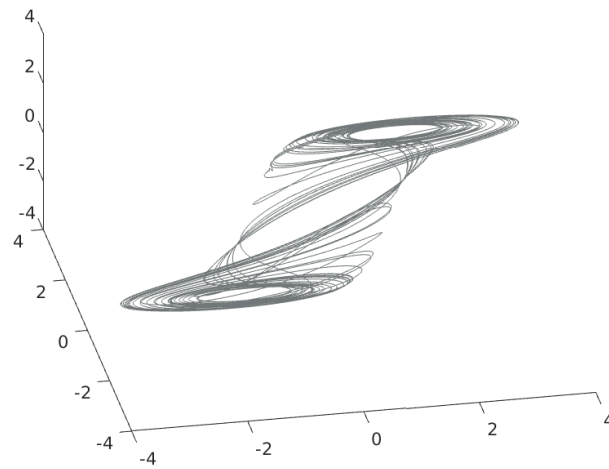


Abbildung 0.3: Chua-Bahncurve im Zustandsraum

Attraktor $\tilde{\mathcal{A}}$ ebenfalls in einem dreidimensionalen Raum dargestellt werden kann. Deshalb wird hier für die Einbettung der chaotischen Lösung des Chua-Schaltkreises die Einbettungsdimension $m = 3$ gewählt.

Als Messfunktion h dient der Spulenstrom i_L . Die Zeitkonstante t_{lag} kann auf die Zeitdauer geschätzt werden, die die normierte Autokorrelationsfunktion braucht um das erste mal den Wert $\frac{1}{e}$ zu erreichen. Im Folgenden wurde diese auf $t_{lag} = 0.34RC_2$ festgelegt.

Die Lösung der Differentialgleichung ist kontinuierlich, kann aber nicht numerisch er-

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{x}_n \in \mathcal{A} \subset \Gamma & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathbf{x}_{n+1} \in \mathcal{A} \subset \Gamma \\
\downarrow h & & \downarrow h \\
s_n \in \mathbb{R} & & s_{n+1} \in \mathbb{R} \\
\downarrow e & & \downarrow e \\
\mathbf{s}_n \in \tilde{\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\mathbf{G}} & \mathbf{s}_{n+1} \in \tilde{\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}^m
\end{array}$$

Abbildung 0.4: Einbettung in den Zustandsraum [KS03]

zeugt, gespeichert und verarbeitet werden. Deshalb wird die Trajektorie hier numerisch berechnet und mit einer Abtastfrequenz f_a abgetastet. Dadurch werden keine Bahnkurven, sondern einzelne Vektoren $\mathbf{s}$ im Zustandsraum erzeugt. Diese nennt man auch Zustandsraumvektoren und liegen als diskrete Wertepaare auf der Trajektorie.

Je größer diese Abtastfrequenz gewählt wird, desto dichter liegen diese Vektoren auf der Bahnkurve und desto mehr von ihnen gibt es. Dieser Zusammenhang muss für die vorgestellten Methoden berücksichtigt werden.

1 Prädiktion

Die Zukunft einer determinierten Bahnkurve ist vollständig aus dem Zustand zu einem Zeitpunkt berechenbar. Die Kenntnis der Funktion $\mathbf{F}$ vorausgesetzt, kann der Systemzustand zu jedem Folgezeitpunkt berechnet werden.

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \quad (1.1)$$

Reale Systeme werden durch eine Vielzahl von äußeren und inneren Effekten beeinflusst. Ein chaotisches System reagiert auf kleine Änderungen mit sehr großen Änderungen in der Zukunft. Das heißt, dass Bahnkurven von zwei ähnlichen Anfangszuständen völlig unterschiedliche Zustände nach einer gewissen Zeit annehmen können. Daher lassen sich chaotische Systeme mit einer endlichen Messgenauigkeit zum Startzeitpunkt nicht weit vorhersagen.

Innerhalb eines kleinen zeitlichen Horizonts hingegen sind die Verläufe von Bahnkurven mit nahen Ausgangszuständen ähnlich. Der Abstand von Trajektorienabschnitten ist begrenzt. In Abbildung 1.1 ist der mit dem Prädiktionshorizont t_l wachsende Abstand der Trajektorienabschnitte gezeigt.

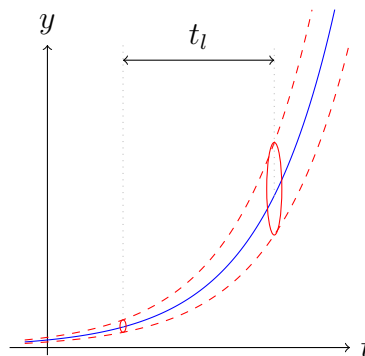


Abbildung 1.1: Begrenzter, aber wachsender Abstand von Trajektorienabschnitten im zeitlichen Verlauf

Die Begrenztheit wird durch den Ljapunow-Exponenten λ des Systems beschrieben werden.¹

¹Ljapunow-Exponenten, Kapitel 5, [KS03]

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_k) \leq \epsilon \quad (1.2)$$

$$d(\mathbf{x}_{n+l}, \mathbf{x}_{k+l}) \leq \epsilon \cdot e^{\lambda l}, \text{ für kleine } l \quad (1.3)$$

Dies ist sowohl im tatsächlichen, wie im rekonstruierten Zustandsraum gültig. Mithilfe dieser Eigenschaft, kann im (rekonstruierten) Zustandsraum eine Prädiktion durchgeführt werden. Der Verlauf der Bahnkurve ausgehend von einem beobachteten Systemzustand $\mathbf{s}_n$ kann durch beobachtete Verläufe der Bahnkurve ähnlicher Systemzustände $\mathbf{s}_k$ approximiert werden.

Korreakterweise müsste hier die Funktion G angewandt werden. Diese ist, wie F im allgemeinen nicht bekannt. Allerdings sind für die $\mathbf{s}_k$ die Abbildungen der Funktion G , nämlich die rekonstruierten Systemzustände $\mathbf{s}_{k+l}$ bekannt.

$$\mathbf{s}_{n+l} = \mathbf{G}(\mathbf{s}_n, l) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{G}(\mathbf{s}_k, l) + c\epsilon_k \quad (1.4)$$

$$= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{s}_{k+l} + c\epsilon_k \quad (1.5)$$

$$= \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{s}_{k+l} \right] + \eta \quad (1.6)$$

$$= \hat{\mathbf{s}} + \eta \quad (1.7)$$

Bekannte $\mathbf{s}_n$ und $\mathbf{s}_k$ und einem konstanten Prädiktionshorizont l vorausgesetzt, können aus Gleichung 1.7 Rückschlüsse auf die Qualität der Prädiktion gezogen werden. So wird der Fehler η klein, wenn

- die Anzahl der gefundenen nahen Zustände K zunimmt.
- der Abstand der gefundenen nahen Zustände ϵ abnimmt.
- der maximal mögliche Abstand der Zustände nach l kleiner wird, also der Ljapunow-Exponent klein wird.

Auf die Anzahl der gefundenen nahen Zustände K und deren Abstand vom vorherzusagenden Zustand ϵ kann Einfluss durch die Parameterwahl genommen werden. Der Ljapunow-Exponent hingegen ist dem System inhärent und kann nicht durch einen Algorithmus beeinflusst werden.

1.1 Einfluss der Abtastfrequenz

In Abbildung 1.2 ist der Verlauf der Trajektorie des Chua-Schaltkreise im rekonstruierten Zustandsraum abgebildet. Als Messfunktion h dient der Spulenstrom i_L . Um nahe Systemzustände zu finden wurde der KNN-Algorithmus² mit einer festen Anzahl zu findender Nachbarn $K = 10$ gewählt.

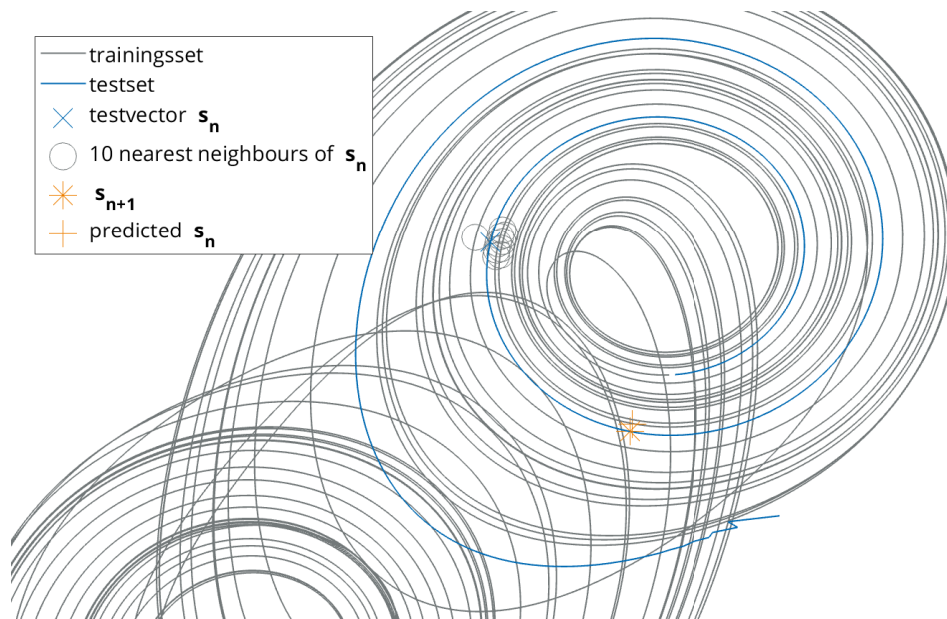


Abbildung 1.2: Prädiktion des Chua im Zustandsraum (Nahaufnahme)

Im rekonstruierten Zustandsraum kann man die räumliche Nähe der gefundenen Nachbarn erkennen. Es fällt auf, dass zeitlich korrelierte Nachbarn auf nahen Trajektorienabschnitten gefunden werden. Die zeitliche Korrelation der nahen Zustände bringt mehrere Effekte mit sich.

Durch die zeitlich korrelierten nahen Zustände wird die Amplitudeninformation beeinflusst. In Abbildung 1.3 ist grafisch dargestellt, dass die Mittelung³ der Abbildungen zeitlich korrelierter Nachbarn zu einer Extremwertdämpfung führt.

Zudem lassen sich viele zeitlich korrelierte Nachbarn finden, wenn häufig abgetastet wird. Damit steigt die Wahrscheinlichkeit, dass ausschließlich die Zustände auf dem nächstgelegenen Trajektorienabschnitt und keine weiteren Abschnitte berücksichtigt werden.

Zum einen werden somit weniger als K verschiedene Trajektorienabschnitte gefunden. Andererseits wichten zeitlich korrelierte Nachbarzustände auch den Trajektorienabschnitt, da mehr Zustände von diesem Abschnitt in die Mittelung einfließen.

²KNN-Algorithmus: K-nächste-Nachbarn, engl. *K-nearest-neighbours*, hier: MATLAB-Implementierung

³Mittelung im Zustandsraum entspricht einer Schwerpunktbestimmung, siehe Dreieck

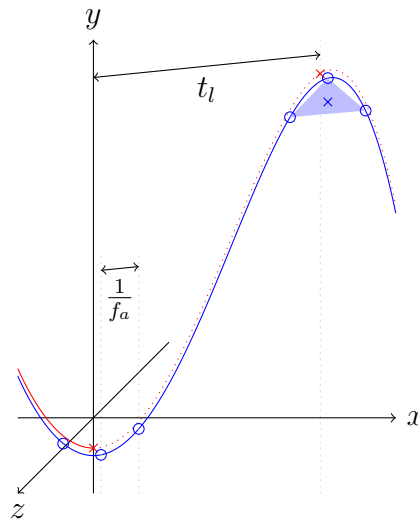


Abbildung 1.3: Einfluss zeitlich korrelierter Nachbarn auf die Prädiktion mit Horizont l : nahe Bahnkurve in blau, vorherzusagende Bahnkurve in rot

Eine lange Abtastzeit führt dazu, dass der Abstand der Zustände im Zustandsraum größer wird. Damit verringert sich die Anzahl gefundener zeitlich korrelierter Nachbarn, allerdings steigt auch der Abstand zu den gefundenen Nachbarn.

Die Abtastzeit muss als Kompromiss zwischen Auflösung und Aufwand gewählt werden. Sie sollte das Auffinden von zeitlich korrelierten Nachbarn möglichst möglichst unterdrücken ohne dass dabei die Abstände zwischen Zuständen auf der Trajektorie zu groß werden.

Um allgemein einer zeitlichen Korreliertheit der Zustände vorzubeugen, könnte die Abtastzeit in der Größenordnung der Verzögerungszeit gewählt werden⁴. Um trotzdem nahe Trajektorienabschnitte zu finden, darf die Abtastzeit allerdings nicht zu großzügig bemessen werden.

Statt die Abtastzeit zu verringern kann hingegen auch die Dauer der Simulation erhöht werden. Durch den vom Attraktor begrenzten Wertebereich der Zustände steigt die Dichte der Trajektorie in diesem Wertebereich und die Wahrscheinlichkeit, nahe Zustände zu finden nimmt zu.

1.2 Verbesserung bei hoher Abtastfrequenz

Bevor eine Veränderung des Algorithmus vorgenommen wird, sollte angemerkt sein, dass die Prädiktion selbst mit einer empirischen Parameterwahl ein subjektiv plausibles

⁴Die Verzögerungszeit wird so bestimmt, dass eine geringe Korreliertheit vorhanden ist

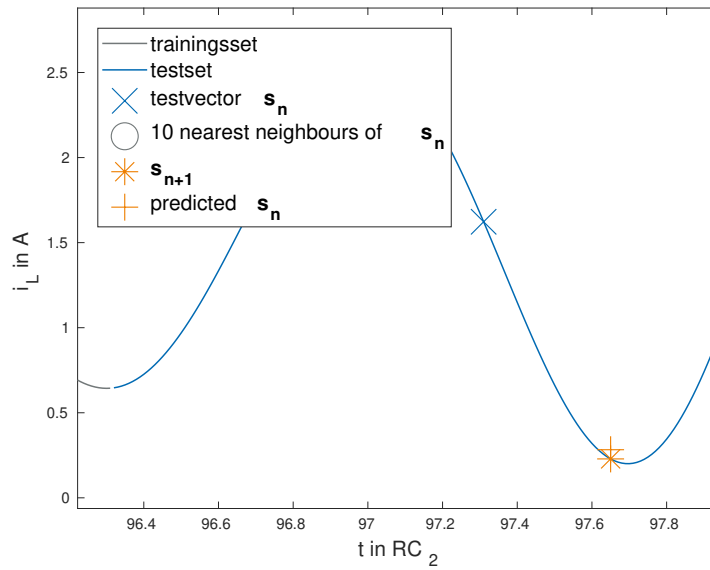


Abbildung 1.4: Prädiktion des Chua im Zeitberich (Nahaufnahme)

Ergebnis liefert. Dennoch sei an dieser Stelle eine Idee zur Verringerung des Einflusses zeitlich korrelierter Zustände angebracht.

Ist eine lange Observationszeit nicht möglich oder muss die Abtastfrequenz hoch gewählt werden, kann der Algorithmus so modifiziert werden, dass er zeitlich korrelierte Zustände ausschließt. Besser noch könnte Nachbarzustand mit dem geringsten Abstand zu s_{n0} mit der Anzahl gefundener zeitlich korrelierter Nachbarn gewichtet werden.

Um die durch zeitliche Korrelation der Zustände auftretenden Effekte zu demonstrieren, wurde die Abtastfrequenz im Beispiel auf $f_a \approx \frac{30}{t_{lag}}$ gewählt.

Kapitel 2

2 Rauschreduktion

Ein bekanntes Phänomen bei allen Messvorgängen ist das Rauschen. In seiner Art und Amplitude kann es Mess- und Simulationsergebnisse erheblich beeinflussen.

Bei einer Einbettung in einen rekonstruierten Zustandsraum kann sich eine verrauschte Messfunktion besonders auf das Ergebnis niederschlagen. Alle eingebetteten Dimensionen werden nicht nur mit dem Rauschen gleicher Leistungsdichte beaufschlagt, sondern sogar beinhalten dieselben Werte.

Dieser Störeinfluss kann selten vollständig beseitigt werden. Allerdings besteht die Möglichkeit, ihn zu verringern. Dazu wird erneut die Begrenztheit des Attraktors genutzt. Ähnlich der Prädiktion werden auch hier die Informationen der nahegelegenen Trajektorienabschnitte und der auf ihnen liegenden, rauschbehafteten Zustände verwendet, um einen Mittelwert zu bestimmen.

Auch lineare Tiefpassfilter, z. B. ein Moving-Average-FIR-Filter, bilden einen Mittelwert um ein Signal von Rauschen zu befreien. Mit der hier vorgestellten Methode wird allerdings kein Mittelwert über die Zeit gebildet. Der Algorithmus beruht darauf, nahe Zustände im Zustandsraum zu finden und diese zu mitteln.

Die Menge $\mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{s}_{n0})$ ist dabei die Menge der Zustände, deren Abstand zu $\mathbf{s}_{n0}$ kleiner ϵ ist. Dabei ist $\mathbf{s}_{n0}$ immer Bestandteil der Menge, die Kardinalität immer größer 1 und die Berechnungsvorschrift liefert immer valide Ergebnisse.

$$\bar{\mathbf{s}}_{n0} = \frac{1}{|\mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{s}_{n0})|} \sum_{\mathbf{s}_n \in \mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{s}_{n0})} \mathbf{s}_n \quad (2.1)$$

Da die Zustandsvektoren $\mathbf{s}$ zeitliche Randbereiche beinhalten, kann es sinnvoll sein, im Zeitbereich eine in der Mitte gelegene Dimension $s_{m/2}$ zu betrachten. Dabei muss im Vergleich mit dem gemessenen Signal $h(\mathbf{x})$ die Zeitverschiebung von $\frac{m}{2} \cdot t_{lag}$ beachtet werden.

$$\mathbf{s} = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_m]^\top \quad (2.2)$$

$$= [h(x(t)) \ h(x(t + t_{lag})) \ \dots \ h(x(t + m \cdot t_{lag}))]^\top \quad (2.3)$$

Einen großen Einfluss auf das Ergebnis dieses Verfahrens hat der begrenzende Abstand ϵ . Wählt man diesen zu groß, wird über weit entfernte Zustände gemittelt. Die Folgen

können eine starke Fokussierung auf die Schwerpunkte des Attraktors oder unerwünschte Artefakte sein. Deshalb sollte der Abstand eher konservativ geschätzt werden. Wird dieser Maximalabstand allerdings zu klein gewählt, werden keine oder nur noch wenige nahe Zustandsvektoren gefunden und diese Methode wird wirkungslos.

In der Literatur wird empfohlen, ϵ im Bereich vom 2 bis 3-fachen der Rauschamplitude zu wählen. ([KS03], S. 61)

2.1 Abstandsberechnung

Die vorgestellten Methoden beruhen darauf, einen Abstand zwischen den Vektoren in Zustandsraum zu bestimmen. Diese Distanz d kann auf unterschiedliche Arten berechnet werden und hat dementsprechend auch einen Einfluss auf das Ergebnis.

$$d_p(\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_l) = \|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_l\|_p = \sqrt[p]{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |s_{k,i} - s_{l,i}|^p} \quad (2.4)$$

Laut Kantz und Schreiber kann aber bei der hier verwendeten Einbettungsdimension $m = 3$ durchaus die Maximum-Norm¹ verwendet werden. Erst für große Einbettungsdimensionen $m > 20$ sollten die Einflüsse aller Dimensionen berücksichtigt werden und daher die euklidische Norm angewandt werden. ([KS03], S.60)

Mit der Distanz d kann können die Zustandsraumvektoren $\mathbf{s}$ untereinander verglichen und ‘nahe Nachbarn’ gefunden werden. Berechnungszeit und Ergebnis hängen stark davon ab, wie ‘Nachbarschaft’ definiert und berechnet wird.

Eine Abstandsmatrix ist der intuitive Ansatz. Dabei wird eine Matrix aufgestellt, die die Abstände der simulierten Werte zueinander enthält.

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,N} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots & d_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N,1} & d_{N,2} & \cdots & d_{N,N} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$\text{mit } d_{j,k} = d(s_j, s_k), \quad N = f_a \cdot t_{sim} \quad (2.6)$$

$$\text{folglich } d_{j,k} = 0 \Leftrightarrow j = k, \quad d_{j,k} = d_{k,j} \quad (2.7)$$

¹Maximum-Norm oder City-Block-Distanz

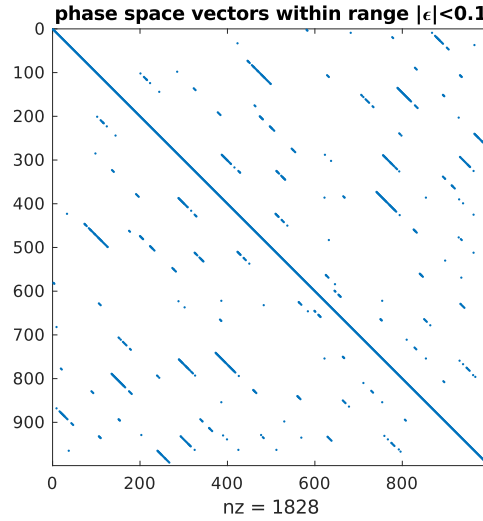


Abbildung 2.1: Abstandsmatrix mit $d_{j,k} < \epsilon$ markiert

Diese Abstandsmatrix wächst quadratisch und beansprucht somit schnell sehr viele Ressourcen. Es hat sich gezeigt, dass diese Matrix für einen hinreichend umfangreichen Datensatz nicht praktikabel ist. Für anschauliche Zwecke² kann sie jedoch durchaus genutzt werden.

An Abbildung 2.1 lässt sich beispielsweise ein Verhalten ähnlich einer Periodizität beobachten. Diese ‘Periodizität’ wird durch die Abstände der Diagonalen in der Matrix sichtbar.

Für das Finden von nahen Nachbarn werden Nachbarn ab einem bestimmten Abstand nicht mehr berücksichtigt. Entfernt man aus einer Abstandsmatrix alle weit entfernten Zustände, ist diese meist sehr dünn besetzt.

Ein etwas geschickterer Ansatz ist, gerade in Hinblick auf den Algorithmus zur Rauschreduktion, nur die Zustände innerhalb der Trajektorie zu sammeln, die einen bestimmten Abstand unterschreiten. Für jeden einzelnen Zustand müssen diese nahen Zustände berechnet und gespeichert werden. Kantz und Schreiber empfehlen sogar Box-unterstützten Algorithmen ([KS03], S. 63), mithilfe derer eine Komplexität der Größenordnung $\mathcal{O}(N)$ erreicht werden kann.

Es hat sich gezeigt, dass auch hier der KNN³ zuverlässige Ergebnisse liefern kann, da er ressourcensparend arbeiten kann. Bei der Variation von K konnten im Ergebnis geringfügige Unterschiede festgestellt werden. Daher wurde hier auf eine präzise Umsetzung des Algorithmus zugunsten der Ressourcen verzichtet und $K = 10$ empirisch gewählt.

²Anschauung einer weiteren Abstandsmatrix in [KS03], S.45

³hier: KNN Implementierung von Matlab

2.2 Ergebnis und Interpretation

Die Rauschreduzierung mithilfe der Mittelung naher Zustände muss aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet werden um richtig interpretiert werden zu können. Aus der Perspektive des Zeitbereichs lassen sich Phänomene betrachten, die aus der stark variierende Anzahl der gefundenen nahen Zustände resultieren.

Wenn wenige oder gar keine nahen Zustände gefunden werden (siehe Abbildung 2.2), wird das Signal kaum oder garnicht verändert. An Stellen im Zeitbereich an denen viele benachbarte Zustände gefunden werden (siehe Abbildung 2.3), kann eine leichte Glättung des Signals festgestellt werden. Die Wirkung der Glättung im Zeitbereich hält sich subjektiv allerdings in Grenzen.

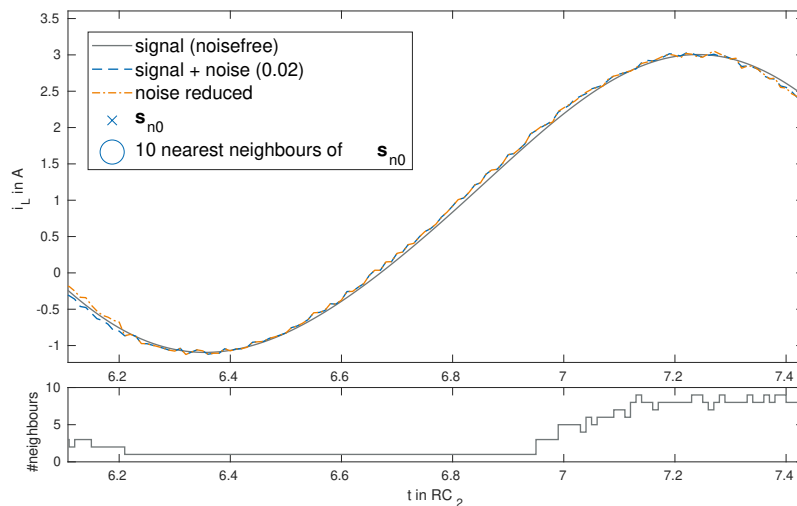


Abbildung 2.2: Rauschreduktion im Zeitbereich bei wenigen nahen Zuständen

Durch den Algorithmus werden Zustände auf benachbarten Trajektorienabschnitten gefunden. Das bedeutet, dass die Trajektorie an sich selbst, beziehungsweise an Volumina angenähert wird, die häufig durchlaufen werden. Das ist ein fundamentaler Unterschied zu digitalen Filtern. Ein FIR-Filter hat einen begrenzten zeitlichen Horizont M . Die Mittelung im Zustandsraum hingegen funktioniert über die Ähnlichkeit von Systemzuständen unabhängig vom Zeitpunkt, an dem sie auftreten.

Das Ziel dieser Rauschreduktion ist im Zustandsraum zu verorten. Dort zeigt sich die Wirkung des Algorithmus. Ausreißer und Abweichungen vom Attraktor werden eingefangen und abgeschwächt. In Abbildung 2.4 ist auch der Effekt auf Trajektorienabschnitte innerhalb des Attraktors zu erkennen. Befindet sich ein Abschnitt innerhalb des Attraktors, wird Rauschen, das Auswirkungen in den Ausdehnungen des Attraktors hat kaum verbessert. Es kann sogar dazu kommen, dass einzelne Zustände durch das Rauschen näher an nicht nahe Abschnitte herankommt. Dadurch können teilweise sogar Artefakte entstehen.

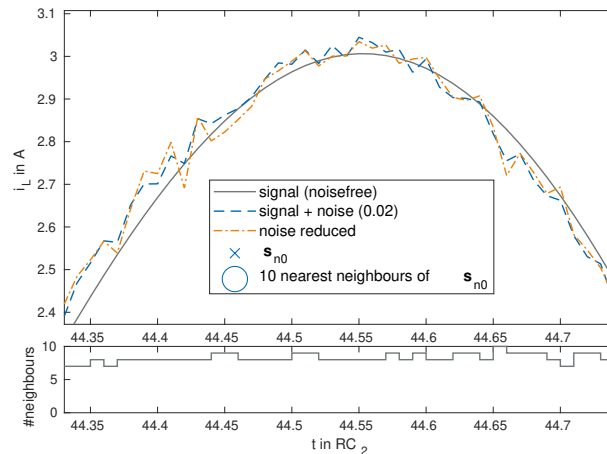


Abbildung 2.3: Rauschreduktion im Zeitbereich bei wenigen vielen nahen Zuständen

Auch hier kann die Abtastfrequenz einen Einfluss haben. Bei hoher Abtastfrequenz werden viele Zustandsvektoren erzeugt. Sind diese mit einem gleichverteilten Rauschen beaufschlagt, wird dadurch die Wahrscheinlichkeit erhöht, dass fälschlicherweise eine Nähe zu Zuständen angenommen wird, wo diese ohne Rauschen nicht vorhanden wäre.

Der Gewinn dieser Rauschreduktion ist damit nicht am einzelnen Trajektorienabschnitt zu bewerten. Vielmehr kommt durch dieses Verfahren die ursprüngliche Gestalt des Attraktors stärker zum Vorschein. Beispielhaft wurde ein deterministisches Signal mit Rauschen beaufschlagt, in den Zustandsraum eingebettet und darauf der Algorithmus appliziert. In Abbildung 2.5 ist die Annäherung an den Attraktor⁴ zu erkennen.

Die Ergebnisse an der Trajektorie des Chua können mit denen am NMR-Laser in Abbildung 2.6 verglichen werden. Das Rauschreduzierte Signal des NMR-Laser zeigt ein subjektiv erfolgreiches Ergebnis. Der Attraktor Chua ist ‘flächiger’⁵ als der des NMR-Lasers. Das beeinträchtigt das Ergebnis dieses Verfahrens. Es kann ausschließlich das vom Attraktor unabhängige Rauschen reduziert werden. Höherdimensionale Attraktoren haben mehr Freiheitsgrade, in denen das Rauschen nicht unterdrückt werden kann.

Ist das Rauschen unabhängig von Messfunktion und System, also eine stochastisch unabhängige Größe, kann die Einbettung in einen Zustandsraum höherer Dimension m und die Applizierung derselben Verfahren zu besseren Ergebnissen führen, da die Dimension des Attraktors dieselbe bleibt und die Leistung des Rauschens auf alle Einbettungsdimensionen verteilt wird. ([KS03], S. 60)

⁴Bei Sinus: Ein Kreis

⁵höherdimensional

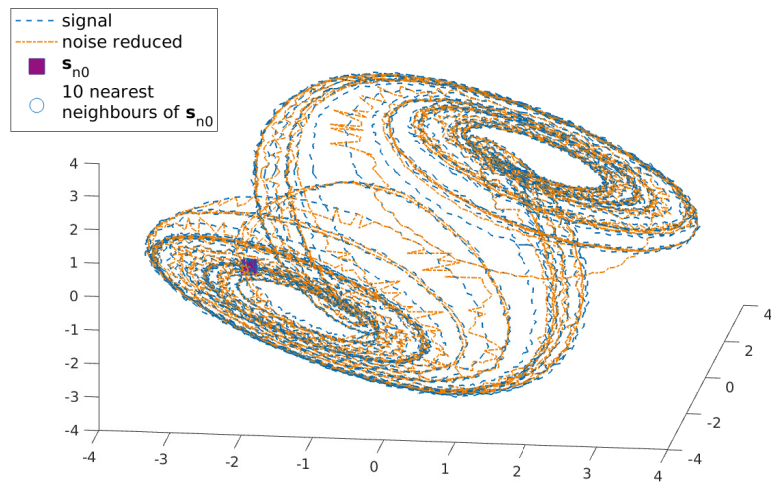


Abbildung 2.4: Rauschreduktion im Zustandsraum

2.3 Metrik für die Rauschreduktion

Bei allen vorgestellten Algorithmen und Methoden konnten nur subjektive Eindrücke vermittelt werden. Ein objektives Maß für die Qualität der Ergebnisse ist aber für die Messbarkeit von Erfolg oder Nichterfolg einer Methode unabdingbar.

Eine nichtlineare Metrik könnte die Korrelationssumme sein. ([KS03], Kapitel 6, S. 80) Die Untersuchung, ob sie sich tatsächlich für die quantitative Bewertung der Ergebnisse eignet, war nicht Teil dieser Arbeit.

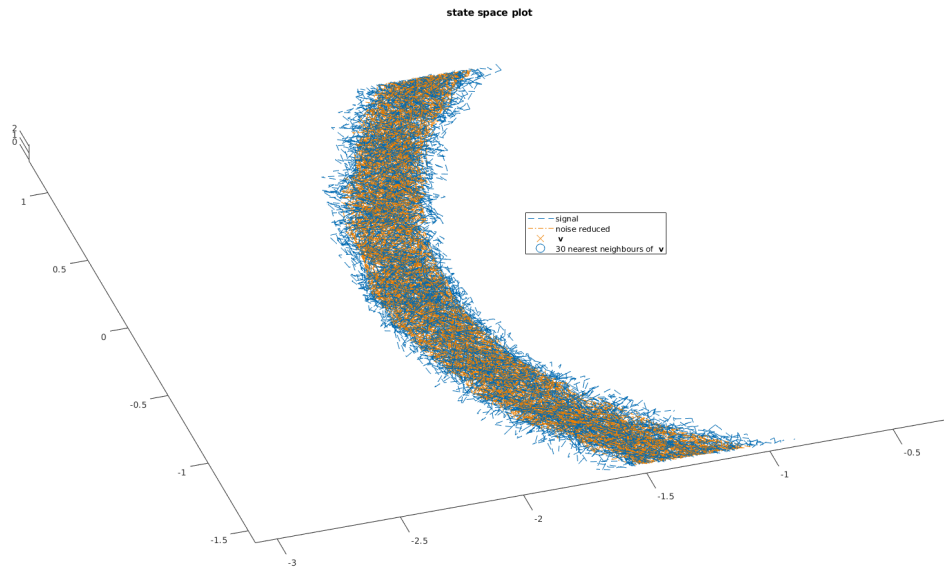


Abbildung 2.5: Rauschreduktion auf einen eingebetteten Sinus im Zustandsraum

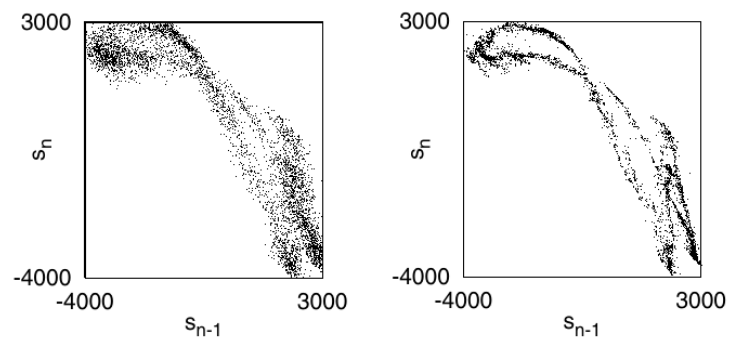


Figure 4.5 Simple nonlinear noise reduction. 5000 values of the NMR laser data (Example 1.1) were contaminated with 10% artificial noise with the same power spectrum, as shown in the left hand panel. On the right the simple noise reduction algorithm described above has been used to clean the data.

Abbildung 2.6: Rauschreduktion NMR Laser [KS03]

Literatur

- [Chu07] L. O. Chua. „Chua circuit“. In: *Scholarpedia* 2.10 (2007). revision #140932, S. 1488.
- [KS03] Holger Kantz und Thomas Schreiber. *Nonlinear Time Series Analysis*. 2. Aufl. Cambridge University Press, 2003.